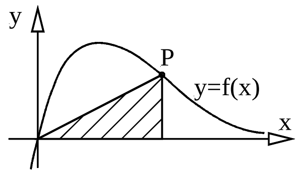
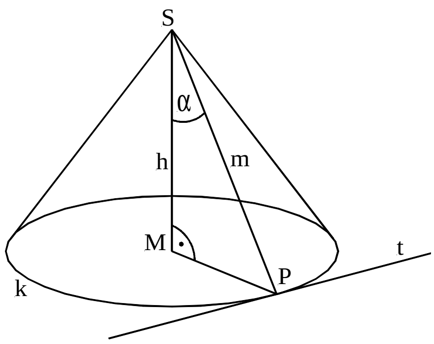
Mathematik

1. **Kurvendiskussion**
Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 5x \cdot e^{-x}$. (Rechne möglichst mit exakten Werten.)
   a) Bestimme die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstelle, Extremum, Wendepunkt).
   b) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Körpers.
   c) Die Wendetangente und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne dessen Fläche.
   d) Der Kurvenpunkt P ist Eckpunkt des dargestellten Dreiecks. Dieses Dreieck rotiert um die x-Achse. Wie gross kann das Volumen des so entstehenden Kegels maximal werden und welches sind dann die Koordinaten von P?



2. **Flächen** (Thema mit Variationen)
Drei unabhängige Fragen zur Parabel $y = f(x) = t \cdot x - x^2$, wobei $t > 0$ sein soll:
   a) Die Parabel $y = f(x) = t \cdot x - x^2$ und die Gerade $y = x$ sollen eine Fläche von 36 (Quadrat-Einheiten) umschliessen. Wie gross ist t?
   b) Die im I. Quadranten unterhalb von $y = f(x) = t \cdot x - x^2$ liegende Fläche wird von der Parabel $y = x^2$ in zwei Teilflächen F_1 und F_2 zerschnitten. Weise nach, dass das Verhältnis der beiden Teilflächen $F_1 : F_2$ konstant (d.h. von t unabhängig) ist.
   c) Die Parabel $y = f(x) = t \cdot x - x^2$ und deren Kurvennormale im Koordinatenursprung schliessen eine Fläche ein. Für welchen Wert von t wird diese Fläche extremal? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum? (Begründe.)

3. **Ein Kegel**
Von einem geraden Kreiskegel mit Drehachse h (siehe die Figur) kennt man die Mantellinie m = SP sowie die Ebene ε, welche den Grundkreis k enthält.
$S(7 \mid 5 \mid 0)$, $P(3 \mid -1 \mid 2)$, ε: $2x + 2y + z - 6 = 0$.



   a) Berechne den halben Öffnungswinkel α.
   [α ist der Winkel zwischen h und m.]
   b) Berechne das Volumen des Kegels.
   c) Weise nach, dass der Punkt $Q(5 \mid 3 \mid -4)$ im Innern des Kegels liegt.
   d) Bestimme die Koordinatengleichung derjenigen Ebene, welche den Kegel entlang der Mantellinie m berührt. Hinweis: diese Ebene enthält m und die Kreistangente t im Punkt P.

4. **Die aufgeblasene Kugel**

Gegeben ist die Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z + 17 = 0$
sowie die Gerade g: (11 | 4 | –2) (13 | 5 | –4)

a) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r_1 der Kugel k.

[Wenn die Lösung zu a) nicht gelingt, rechne mit dem Ersatzwert M(6 | 3 | 6) weiter.]

Bei stets gleich bleibendem Zentrum M wird nun der Kugelradius sukzessive vergrössert, d.h. die Kugel wird aufgeblasen.

b) Wie gross muss der Radius r_2 sein, damit die Kugel die Gerade g berührt?
Bestimme r_2 sowie die Koordinaten des Berührpunktes.

c) Wie gross muss der Radius r_3 sein, damit die Kugel aus der Geraden g eine Strecke der Länge 6 herausschneidet?
Bestimme r_3 sowie die beiden Endpunkte dieser Strecke.

d) Wie gross muss der Radius r_4 sein, damit die Kugel und die Gerade g sich unter einem Winkel von $\alpha = 60°$ schneiden?
Bestimme r_4.

5. **Faire Spiele**

In einem Behälter hat man 7 blaue und 5 rote Kugeln. Man zieht zufällig drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. (Das gilt für die ganze Aufgabe.)

a) Zeichne den vollständigen Baum zu diesem Spiel mit allen Wahrscheinlichkeiten.

b) Zwei Fragen: Erstens: Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die dritte gezogene Kugel blau? Zweitens: Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die zweite Kugel rot, wenn man weiss, dass die dritte Kugel tatsächlich eine blaue war?

c) Faires Spiel Nr. 1: Wenn die zweite Kugel rot und die dritte Kugel blau waren, gewinnt man 99 Franken, andernfalls gewinnt man nichts. Wie viel muss bei diesem Spiel als Einsatz gezahlt werden, damit das Spiel fair ist?

d) Faires Spiel Nr. 2: Für jede gezogene blaue Kugel gewinnt man 3 Franken, für jede rote Kugel verliert man x Franken. Für welchen Wert von x ist das Spiel fair?

(Aufgabe 6 befindet sich auf der dritten Seite.)

6. **Mastermind**

Mastermind ist ein Logikspiel, bei dem man ein Codewort herausfinden muss.

a) Das Codewort besteht aus 4 Buchstaben, wobei man zum Bilden des Codeworts die sechs Buchstaben A, B, C, D, E und F zur Verfügung hat.
Bestimme, wie viele Codewörter jeweils möglich sind:

a1) Alle 4 Buchstaben sollen verschieden sein. (z. B. BADE, FEBD, FCBD)

a2) Der Buchstabe A kommt mindestens einmal vor. (z. B. EAEC, ADAC, AAAA)

a3) Das Codewort soll genau zwei verschiedene Buchstaben enthalten. (z. B. EBBE, ADDA, ACAA, BBBF)

b) Asterix und Obelix spielen gegeneinander, wobei Asterix mit 70%iger Wahrscheinlichkeit das Codewort zuerst herausgefunden hat und somit das Spiel gewinnt.

b1) Asterix und Obelix spielen 30 Spiele. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Asterix mehr als 20 Spiele?

b2) Wie oft müssen Asterix und Obelix spielen, damit Obelix mit 95%-iger Sicherheit mindestens einmal gewinnt?

c) Im Verlauf eines Feldzugs gegen die Römer haben Asterix und Obelix 256 Spiele gespielt, wobei Asterix 190 Spiele gewonnen hat. Asterix behauptet deshalb, er gewinne mit mehr als 70%-iger Wahrscheinlichkeit.
Ist die Behauptung von Asterix haltbar?
Formuliere einen ausführlichen Hypothesentest. ($\alpha = 5\%$)

****