Kantonsschule Zug — Matura 2016

Mathematik

Klassen 6G und 6K — O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtung**

   Für $t > 0$ ist die Kurvenschar $y = f_t(x) = 2x^2 - t^2x^4$ gegeben.

   a) Setze $t = 2$. Bestimme die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrema [Minimum? Maximum?], Wendepunkte).

   b) Es gilt immer noch $t = 2$. Die von der x-Achse und der Kurve von $f_2(x)$ eingeschlossene Gesamtfläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

   c) Löse ab hier mit allgemeinem Parameter t.

   Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Kurve von $f_t(x)$ liegende Fläche.

   Die Parabel $y = x^2$ unterteilt diese Fläche in zwei Teilflächen. Weise nach, dass das Verhältnis dieser beiden Teilflächen konstant (d.h. von t unabhängig) ist.

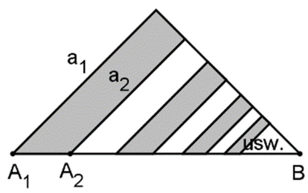
   d) Der Schnittwinkel der beiden Wendetangenten soll genau $\alpha = 60°$ betragen. Für welche Werte von t ist dies der Fall? Bestimme alle Lösungen!

2. **Geo-Dreiecke (Thema mit Variationen)**

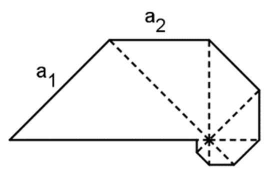
   Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit Winkeln 45°, 45°, 90° heisst Geo-Dreieck.

   a) Man hat einen Stapel von unendlich vielen Geo-Dreiecken. Deren Kathetenlängen bilden eine Geometrische Folge. Man kennt die Katheten der ersten beiden Dreiecke: $a_1 = 10$ cm, $a_2 = 8$ cm. Das erste Dreieck ist grau, das zweite weiss, das dritte wieder grau, das vierte weiss, usw. Die Dreiecke werden aufeinandergelegt, so dass für alle Dreiecke B ein Eckpunkt ist (wie in der Figur dargestellt).

   Berechne die so insgesamt entstehende graue Fläche.



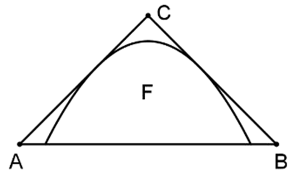
   b) Die Figur besteht aus einer "Spirale" aus 8 Geo-Dreiecken. Man kennt die Kathete des zweiten Dreiecks: $a_2 = 40$ cm. Berechne den Umfang der Figur. (Die Trennlinien zwischen den Dreiecken gehören nicht zum Umfang.)



   c) Einem Geo-Dreieck mit Basis AB = 2 cm wird eine Parabel einbeschrieben. Die Parabel berührt die Katheten AC und BC. Die Figur ist achsensymmetrisch.

   Wie gross kann die innerhalb des Parabelbogens liegende Fläche F maximal werden?

   Hinweis: Man wähle ein Koordinatensystem und mache in diesem Koordinatensystem einen Ansatz für die Parabelgleichung.



3. **Pyramide**

Wir betrachten eine Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S. Man kennt:

- die Punkte A(5 | 9 | 3) und B(3 | –1 | 5);
- die Ebene ε_1: $4x + y - 3z - 20 = 0$, in welcher das Dreieck ACS liegt;
- die Ebene ε_2: $20x - 13y - 9z - 28 = 0$, in welcher das Dreieck BCS liegt.

a) Die Gerade g = CS ist die Schnittgerade von ε_1 und ε_2. Bestimme diese Gerade g.

Rechne ab hier mit der Geraden g durch die Punkte (6 | 5 | 3) und (8 | 6 | 6) weiter.

b) Die Grundfläche ABC soll ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AB sein. Wo muss folglich $C \in g$ liegen?

Rechne ab hier mit dem festen Punkt C(2 | 3 | –3) weiter. Es gilt $C \in g$.

c) Berechne den spitzen Winkel zwischen g und der Ebene des Dreiecks ABC.

d) Wo muss die Pyramidenspitze S liegen, damit das Pyramidenvolumen V = 48 beträgt? Hinweis: Die Fläche des Dreiecks ABC ist ein nützliches Zwischenergebnis.

4. **Zwei Kugeln**

Man hat zwei Kugeln k_1 und k_2 mit ***gleichem*** Radius.
Von der Kugel k_1 kennt man das Zentrum M_1(1 | 13 | 2).
Von der Kugel k_2 kennt man die Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 - 26x - 2y - 16z + 225 = 0$.
Die Gerade g geht durch die Punkte M_1 und Q(2 | 12 | 3)

a) Bestimme Mittelpunkt und Radius von k_2. Löse diese Teilaufgabe "von Hand".

[Wer Teil a) ***nicht löst***, darf mit den Ersatzwerten M_2(7 | 1 | 14) und $r_2 = 3$ weiterarbeiten.]

b) Bestimme den kürzesten Abstand zwischen den Kugeln k_1 und k_2 sowie die Koordinaten der beiden Punkte (auf k_1 resp. auf k_2), welche am nächsten zueinander liegen.

c) Das Zentrum der Kugel k_1 wird nun entlang der Geraden g in Richtung zum Punkt Q (und weiter auf g) verschoben. Die Kugel k_2 bleibt fest, ebenso die Kugelradien. In welchem Punkt der Geraden g muss das Kugelzentrum neu liegen, damit sich die beiden Kugeln zum ersten Mal berühren? Bestimme die Koordinaten des neuen Zentrums M_1' sowie den Berührpunkt.

d) Wenn man die Kugel k_1 weiter verschiebt, werden sich die beiden Kugeln schneiden. In welchem Punkt der Geraden g muss das Zentrum neu liegen, damit der Schnittkreis der beiden Kugeln möglichst grossen Radius hat? Bestimme das neue Kugelzentrum M_1" und diesen grösstmöglichen Radius.

5. **Glücksspiel-Automat**

Der Glücksspielautomat "Liberty Bell" stammt aus dem Wilden Westen. Der Spieler musste zunächst eine 10-Cent-Münze (10 c) als Einsatz einwerfen, konnte dann den Hebel betätigen, worauf sich die drei Zylinder bewegten und zufällig stehen blieben. Je nach Position der Zylinder erfolgte eine Auszahlung.
Wir rechnen für die Auszahlung mit folgender Tabelle:

Auszahlung:	0	5 c	10 c	20 c	50 c
Wahrscheinlichkeiten:	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

a_1) Ted spielt zunächst 10 Mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er in diesen 10 Spielen mindestens einmal den Maximalgewinn von 50 c ausbezahlt?
a_2) (Anschlussfrage): Wie viele Spiele müsste Ted insgesamt durchführen, um mit 99%-iger Sicherheit mindestens einmal die Auszahlung von 50 c zu erzielen?

b) Donald spielt 4 Mal. Mit welchem durchschnittlichen (zu erwartenden) Gewinn – oder Verlust – wird er anschliessend (d.h. nach den vier Spielen) nach Hause gehen?

c) Bernie hat den Verdacht, dass die Angabe der Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ für den "Nuller" nicht stimmt. Er beobachtet in 60 Spielen 30 "Nuller".
Ist der Verdacht von Bernie berechtigt? Formuliere einen Hypothesentest (α = 5%).

d) Hillary vermutet auch, dass die "Nuller" häufiger vorkommen als in der Tabelle angegeben. Sie beobachtet im Verlauf eines Tages 630 Spiele.
Welche Anzahl von "Nullern" bestätigen somit den Verdacht von Hillary? (α = 5%)

6. **Zwei Aufgaben aus der Stochastik**

a) Beim Wettbewerb "Kaenguru der Mathematik" beantworten die Teilnehmenden 30 Fragen. Für jede Frage stehen 5 Antworten zum Ankreuzen zur Wahl, wovon immer genau eine richtig ist. Jeder Teilnehmer kreuzt pro Frage genau eine Antwort an.

a_1) Auf wie viele verschiedene Arten kann man das Antwortblatt ausfüllen?

a_2) Auf wie viele verschiedene Arten kann man das Antwortblatt ausfüllen, so dass alle Fragen falsch beantwortet wurden?

a_3) Es ist auch möglich, bei einer Frage kein Kreuz zu setzen (und "leer" zu antworten). Wie viele verschiedene Antwortblätter wären theoretisch möglich, bei denen genau 15 Fragen richtig, 10 falsch und 5 "leer" beantwortet wurden?

b) Auf die Testfrage "Konsumieren Sie Kokain?" wird kaum jemand mit "Ja" antworten. Deshalb führt man den Test wie folgt durch: Jede Testperson wirft einen Würfel, aber so, dass niemand anderes das Ergebnis sieht. Wer eine 1 gewürfelt hat, antwortet obligatorisch mit "Ja", wer eine 2, 3 oder 4 gewürfelt hat, antwortet obligatorisch mit "Nein", und wer eine 5 oder 6 gewürfelt hat, antwortet wahrheitsgetreu.

b_1) Wir nehmen an, dass 8% der Testpersonen Kokain konsumieren. Testperson A führt den Test durch und beantwortet die Frage "Konsumieren Sie Kokain?" mit "Ja". Mit welcher Wahrscheinlichkeit konsumiert Testperson A ***wirklich*** Kokain?

b_2) Bei einem Test stellt jemand fest, dass 20% der Testpersonen mit "Ja" antworten. Wie gross ist somit unter den Getesteten der Anteil an Kokain Konsumierenden?