Das MISSISSIPPI-Problem

Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anordnen?

1. Erklärung:

Wir verteilen die Buchstaben nacheinander auf die 11 zur Verfügung stehenden Positionen. Zuerst wird der M verteilt. Es gibt 11 Möglichkeiten dafür. Dann werden die vier "I" auf die noch freien 10 Plätze (ungeordnet, ohne Wiederholung) verteilt. Anschliessend verteilt man die vier "S" auf die 6 Positionen, die noch frei sind und zuletzt kommen die beiden "P" auf die letzten Plätze.

Das macht insgesamt $\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}$ mögliche Anordnungen. [$\binom{2}{2}$ ist = 1 und könnte auch weggelassen werden, da die Positionen der beiden zuletzt verteilten "P" eindeutig ist.]

Wenn man diesen Ausdruck in Fakultäten umschreibt, erhält man $\frac{11!}{1!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}$.

Kürzen vereinfacht den Ausdruck zu $\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}$, wobei man 1! sogar weglassen könnte, weil 1! = 1 ist.

Man kommt auf das gleiche Schlussresultat, wenn man die Verteilungsreihenfolge vertauscht und beispielsweise zuerst die vier "S" auf 11 Positionen, dann die vier "I" auf noch 7 Positionen verteilt usw.

2. Erklärung:

Folgende andere Lösungsvariante ist absolut gleichwertig: Wenn die 11 Buchstaben alle verschieden wären, dann könnte man sie auf 11! Arten anordnen. Nun sind aber die vier "I" nicht unterscheidbar, also muss man durch 4! dividieren, ebenso sind die vier "S" nicht unterscheidbar, d.h. man dividiert nochmals durch 4! und schliesslich sind die beiden "P" nicht zu unterscheiden, folglich dividiert man durch 2!

Das ergibt das Ergebnis von insgesamt $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$ Anordnungen.

3. Bemerkung:

Die erste Lösungsvariante ist in einem gewissen Sinne dynamisch gedacht, indem die Buchstaben gruppenweise auf die Positionen verteilt werden, die jeweils noch zur Verfügung stehen. Die zweite Lösungsvariante ist so gedacht statisch, indem man alle Buchstaben miteinander hinlegt und die ununterscheidbaren gesondert betrachtet.

4. Die Aufgabe mit den Kugeln:

Nun ist die Aufgabe mit den 4 weissen, drei blauen und zwei roten Kugeln schnell gelöst. Man erhält die beiden untenstehenden gleichwertigen Ausdrücke. Links vom Gleichheitszeichen wurde nach der ersten, rechts davon nach der zweiten Variante gelöst.

$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}=\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$$